

研究論文

피로균열이 진전할 때 용접잔류응력의 재분포와 그 영향⁺

이 용 복* · 조 남 익**

Redistribution of Welding Residual Stress and its Effects on Fatigue Crack Propagation

Y. B. Lee* and N. I. Cho**

Key Words : Residual stress intensity factor(잔류응력 확대계수), Stress riation(응력비), Residual stress redistribution(잔류응력 재분포), Effective stress ratio(유효응력비), Magnetizing stress indicator(자화식 응력지시계), Applied stress(작용응력)

Abstract

Redistribution of residual stress and its effects during fatigue crack propagates from tensile residual stress region in weldment are investigated. Tests are performed by using welded CCT specimens of structural rolling steel(SS400) and it makes fatigue crack propagate from tensile residual stress region. For this study tension-tension loading type is selected by external loading condition and magnetizing stress indicator is used correctly to measure redistribution of residual stress according to fatigue crack growth and number of loading cycles. From this result, it is proved that redistribution of residual stress is mainly consist of residual stress released by fatigue crack growth. When fatigue crack propagates from tensile residual stress region residual stress are redistributed and it makes fatigue crack growth rate largely increase. Fatigue crack growth rate is low in case of redistributed residual stress compare with initial distributed residual stress.

1. 서 론

용접기술의 발전으로 현재 건축물, 교량, 선박,

자동차, 원자로 시설로부터 가정용품에 이르기까지 대부분 용접에 의존하고 있는 실정이며, 작업공정 시간과 비용이 절약되고 접합강도와 효율성이 높아 그 이용이 날로 증가하고 있는 추세이다. 그러

⁺ '95 대한용접학회 춘계학술대회 발표

* 정회원, 홍익대학교 기계공학과

** 정회원, 진주공업전문대학 기계과

나 용접부에는 용접과정중에 생기기 쉬운 기포, 슬래그 혼입, 언더컷, 피트, 균열 등 다양한 형태의 결함들이 존재하는 일이 있으며, 이들 결함으로부터 균열이 진전되어 최종파단에 이르는 경우가 많다. 또한 용접열로 인하여 국부적으로 팽창 및 수축 등의 열 소성변형이 생기고 높은 잔류응력이 용접부위에 존재하게 되어 용접부의 파괴 및 피로강도를 크게 저하시키는 요인이 되고 있다.

따라서, 현재 용접구조물의 안전사용, 안전설계를 위하여 파괴 및 피로강도를 향상시키고자 하는 노력이 활발하여 이에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 대부분의 재료와 구조물의 파괴는 재료내에 존재하는 결함이나 균열로부터 반복하중에 의하여 균열이 성장하므로써 일어나고 있으며 잔류응력 특성상 인장잔류응력이 분포하면 그 주위에 상반되는 압축잔류응력이 분포하게 되며 인장잔류영역에 결함이 있을 경우에는 균열진전에 크게 영향을 줄 수 있고 압축잔류응력 영역에서는 균열진전을 지연시킬 수 있다.

한편, 인장잔류응력 영역에서 피로균열이 진전하는 경우 균열의 성장에 따라 잔류응력영향이 감소한다"는 보고와 인장잔류응력 영역에서 균열진전속도는 Forman식²⁾에 의한 예상치보다 실험치가 초기의 넓은 구간에서 작고 모재와 비교할 때 큰 차이가 있었다"는 보고 등이 있다.

이상과 같이 재료 내에 결함이나 균열 등이 존재하는 경우 육안이나 비파괴검사로 파괴특성의 평가가 가능하나 구속조건이나 열영향으로 인하여 발생하는 잔류응력은 아직 정확한 파악과 해석이 미흡한 상태이며, 특히 정확한 잔류응력의 측정기술과 반복하중에 의한 피로균열 진전시 잔류응력의 이완등은 이들을 해석하는데 많은 어려움을 주고 있다. 따라서, 본 연구에서는 이를 고려하여 최근에 개발된 자화식 응력지시계(magnetizing stress indicator)를 사용하여 반복하중으로 피로균열이 진전할때 균열선단부위의 잔류응력변화를 측정하고, 잔류응력이 피로균열진전에 미치는 영향을 실험적으로 고찰하였다.

2. 잔류응력분포에 의한 피로균열진전속도와 응력확대계수

용접부의 열소성에 의한 잔류응력은 재료의 피로강도에 상당한 영향을 주고 때로는 재료의 항복

강도보다 높게 분포할 수 있으며 그 부위에 균열이나 결함이 있을때 파손의 원인이 될 수 있다. 이와같이 재료내의 잔류응력은 복잡한 요인에 따라 분포하며 재료의 파괴에 지대한 영향을 미치므로 잔류응력의 분포를 정확히 파악하고, 이로 인한 파괴특성을 고찰하는 것은 매우 중요하다고 본다.

Terada⁴⁾는 무한평판의 맞대기 용접에서 발생하는 잔류응력에 대한 분포는 다음과 같은 관계식으로 설명하고 있다.

$$\sigma_r(x) = \sigma_s \left[1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2} \tag{1}$$

여기서, σ_s 는 용접부의 최대잔류응력값이고, b 는 인장잔류응력의 반폭이다. 또한 외부응력이 작용할 경우 응력분포식은 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \sigma_r(x) \leq \sigma_s \quad (|x| \geq a)$$

$$\sigma_r'(x) = \sigma_s \left[1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2} + \sigma_s \tag{2}$$

$$\textcircled{2} \sigma_r(x) > \sigma_s \quad (0 < |x| < a)$$

$$\sigma_s \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2} = \sigma_s - \sigma_a \tag{3}$$

여기서, a 는 $\sigma_r(x)$ 가 σ_s 와 같아질때 x 의 값이다. 균열이 존재하는 재료의 파괴에 가장 중요한 변수는 응력확대계수이며 일반식은 다음과 같다.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F \tag{4}$$

여기서, F 는 균열의형상과 그 주위의 경계조건으로부터 결정되는 계수이고, 균열면에 내압 P 혹은 균열 중심에 대하여 대칭응력을 받을때 응력확대계수는 Green⁵⁾의 함수를 응용하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} K_I &= \int_0^a \left[\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right] P dx \\ &= 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{\sigma(x)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \end{aligned} \tag{5}$$

그리고 용접부에 외부작용응력과 잔류응력이 중첩하여 작용할때 유효응력확대계수(K_{eff})는 다음과 같다.

$$K_{eff} = K + K_{rs} \quad (6)$$

또한, 작용응력에 의한 응력확대계수(K)⁽⁶⁾는

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \left[1 - 0.025 \left(\frac{2a}{W} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{2a}{W} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}} \quad (7)$$

잔류응력에 의한 응력확대계수값(K_{rs})은 식 (5)로부터

$$K_{rs} = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{\sigma_r(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (8)$$

유효응력확대계수 폭(ΔK_{eff})은

$$\begin{aligned} \Delta K_{eff} &= (K_{max} + K_{rs}) - (K_{min} + K_{rs}) \\ &= K_{max} - K_{min} = \Delta K \end{aligned} \quad (9)$$

유효응력비를 응력확대계수비로 나타내면 유효응력비(R_{eff})는

$$R_{eff} = \frac{K_{min} + K_{rs}}{K_{max} + K_{rs}} \quad (10)$$

이들 값을 Forman식에 적용하면 균열진전속도 da/dN 과 ΔK 의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} da/dN &= \frac{C(\Delta K_{eff})^m}{(1-R_{eff})K_{eff} - \Delta K_{eff}} \\ &= \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R_{eff})K_{eff} - \Delta K} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 K_{eff} 는 크랙 진전율이 불안정하게 되는 순간의 응력확대계수이며, 이 식으로부터 용접잔류응력 및 작용응력의 중첩응력에 의한 피로균열특성을 파악할 수 있다.

3. 실험 방법

3. 1 재료 및 시험편

본 연구에 사용된 재료는 일반구조용 압연강재인 SS400을 사용하였으며, 실험에 사용된 재료의 화학적 성분 및 기계적 성질은 Table 1, 2와 같으며, 용접시 사용한 용접봉의 화학적성분 및 용접조건을 Table 3, Table 4에 나타내었다.

Table 1. Chemical composition of the base metal (Wt. %)

Material	C	Si	Mn	P	S
SS400	0.018	0.19	0.61	0.014	0.011

Table 2. Mechanical properties of base metal

Material	σ_u	σ_y	Elongation	I.V
SS400	41.61	34.7	31	45

Table 3. Chemical composition of welding wire(Wt. %)

Material	C	Si	Mn	P	S
KR3000	0.07 ~0.08	0.518 ~0.65	1.15 ~1.42	0.018 ~0.019	0.011 ~0.012

Table 4. Condition of metal arc welding

ϕ (mm)	pass	current(A)	speed(cm/min)
2.5	1	101	25

시험편 형상은 Fig. 1과 같이 폭 100 mm, 길이 330 mm로 하여 길이방향과 rolling 방향을 같이 하여 기계가공하였다. 기계가공 등으로 인하여 존재할 가능성이 있는 잔류응력을 제거하기 위하여 전기로에서 550°C로 가열하여 30분 이상 유지시킨 다음 노냉시켰다. 이때 잔류응력을 0~0.3 kg/mm² 범위내로 하였고, 그후 용접시험편은 용접잔류응력을 유발시키기 위하여 모재 시험편 위에 Table 4의 조건으로 폭 8 mm의 용접 비드를 내었다. 그리고 시험편 중앙에 2 mm의 원공노치를 뚫고 양쪽으로 0.5 mm의 노치와 2.5 mm의 균열을 내어 시험편으로 사용하였다.

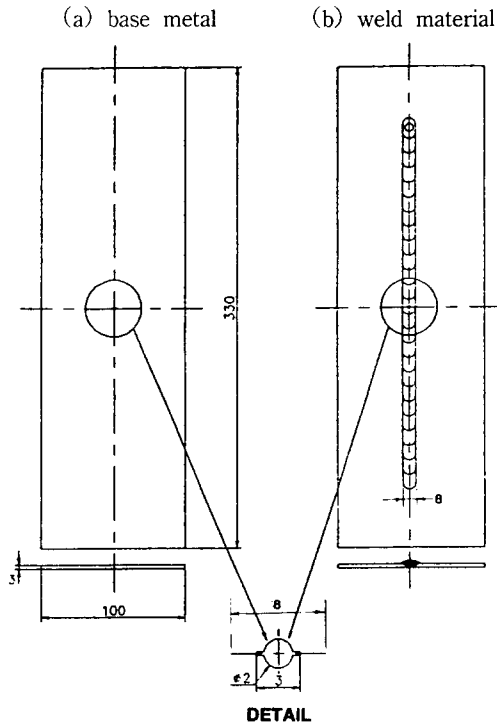


Fig. 1 Configuration of test specimen(unit : mm)

3. 2 실험장치 및 방법

본 실험을 위하여 25 ton 용량의 전기유압식 만능 재료 시험기(Instron, 1332 series)를 사용하였으며, 정현파를 사용하여 진동수는 13 Hz로 일정하게 하였다. 응력비($R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 20.4 / 204 \text{ MPa}$)는 0.1로 일정하게 하였고, 균열길이의 측정은 배율이 20배인 이동현미경을 사용하였다. 잔류응력의 측정은 최근에 개발된 자화식 응력지시계(Sigmatron, magnetizing stress indicator)를 이용하였으며, 노치를 만들기전에 초기 용접잔류응력의 분포를 먼저 측정하고 실험중에 매 20,000 사이클마다 잔류응력의 변화를 측정하였다. 이때 측정기의 재료계수인 gain 값을 2로 하였다.

또한 용접잔류응력이 분포하는 시편에 반복하중을 작용시킬때 사용한 시편과 동일한 초기 노치를 가공한 다음 실험으로 1 mm씩 노치를 진전시키면서 그때마다 변하는 잔류응력을 측정하였고, 초기 노치를 만들지 않고 반복응력만을 작용시켜 용접부에서 나타나는 잔류응력분포의 변화를 측정해

보았다. 모든 시편의 잔류응력을 측정할 때 항상 일정한 폭만큼 세로에 평행선을 긋고 중심선을 그어서 probe를 정확히 밀착시켜 측정하도록 하였다. 균열의 진전길이를 측정할 때에는 항상 양쪽을 모두 측정해서 이 두 값에 약간의 차이가 생길 경우에는 이들 값의 평균치로 실험 data를 정하였다.

4. 실험결과 및 고찰

4. 1 균열의 진전과 반복 하중수에 따른 용접잔류응력의 재분포

인장잔류응력영역에서 피로균열이 진전할 경우 균열진전으로 인한 잔류응력의 재분포는 균열이 초기에 압축잔류응력이 존재했던 위치까지 진전해도 균열선단 부근에는 인장잔류응력이 분포한다²⁾고 보고되어 있으며, 잔류응력과 작용응력이 중첩되어 피로균열에 영향을 미치는데 외부하중의 크기와 반복수에 따라 피로균열에 미치는 영향의 정도가 다르며 피로균열이 진전됨에 따라 잔류응력의 분포도 수시로 변하게 되어 그 영향이 달라진다.

이와 같은 복잡한 요인으로 잔류응력에 의한 피로균열의 진전을 정확하게 파악하는 것은 매우 어려우며, 지금까지 측정방법이 간단해서 많이 사용하던 Mather의 hole drilling method⁶⁾로는 시험재료를 파손하면서 잔류응력을 측정해야 하기 때문에 수많은 시편과 시간이 요구되었다. 그러나 자화식 응력지시계를 이용함으로써 시험중에 수시로 잔류응력 변화 및 분포상태를 디지털 형식으로 간단하게 측정할 수 있어 본 연구를 수행가능케 하였다. 이러한 지시계를 이용하여 우선 용접부위의 잔류응력분포를 측정 한 후의 결과를 Terada식과 비교해서 나타내면 Fig. 2와 같다.

본 연구에서 잔류응력이 피로균열에 주는 영향을 정확히 파악하기 위하여 같은 하중조건에서 잔류응력의 변화특성에 대한 필요성을 인식하여 우선 잔류응력이 분포하는 시험편에 노치 없이 반복하중을 작용시켜 보았다. 그 결과 Fig. 3에 나타난 바와 같이 2.4×10^6 사이클 이상까지 잔류응력 변화는 거의 없음을 알 수 있었다. 그리고 균열길이가 증가할때 잔류응력의 변화를 알아보기 위하여 용접시험편 중앙에 노치를 만들고 실험을 이용하여 slit 형태의 노치길이를 증가시키면서 잔여 시

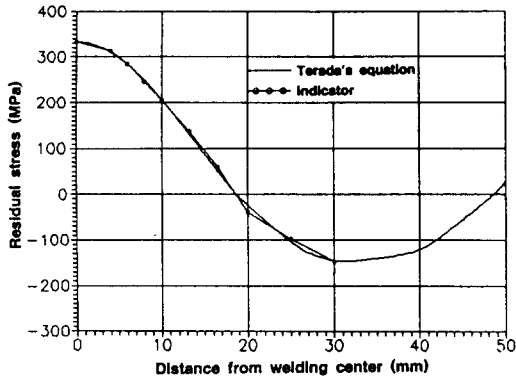


Fig. 2 Distribution initial residual stress by magnetizing indicator and Terada's equation

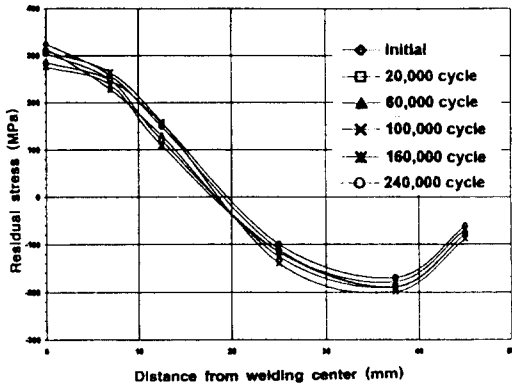


Fig. 3 Redistribution of residual stress on unnotched specimen under applied stress

험편 폭에서의 잔류응력 변화를 측정하여 보았다.

이와 병행하여 실제 피로시험중에 균열길이가 증가할경우 같은 길이에서 시험편 내의 잔류응력의 변화에 대해서도 측정하였다. 그 결과, 노치 및 균열길이가 같은 위치에서 잔여폭내의 잔류응력분포가 거의 일치되고 있음을 알 수 있었다. 이와 같은 결과로부터 본 실험의 하중조건하에서 용접부의 잔류응력 변화는 Fig. 4에서 보는 바와 같이 측정오차를 고려해서 잔류응력의 절대값은 5% 이내이기 때문에 반복하중수의 영향을 거의 받지 않고 균열이 진전됨에 따라 영향을 받으며 이는 잔류응력이 주로 균열진전에 영향을 주고 있음을 나타내고 있다. 또한, 균열이 진전됨에 따라 초기 잔류응력은 계속 변하여 재분포하고 있음을 알 수 있다. 이상의 결과로부터 용접부의 잔류응력은 반복하중

사이클에 영향을 받지 않고, 다만 균열 진전에 기여하므로써 이완되고 있음을 알 수 있다.

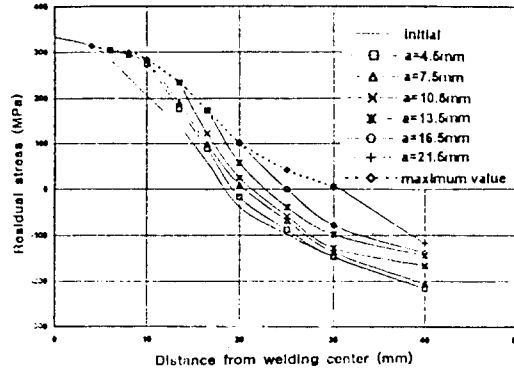


Fig. 4 Redistribution of residual stress caused by fatigue cracking

4. 2 용접잔류응력에 의한 피로균열 진전특성

용접재료나 구조물에 분포하는 잔류응력이 피로균열에 미치는 영향에 대하여 많은 연구결과⁹⁻¹³⁾가 발표되고 있으며, 초음파법에 의한 잔류응력을 비파괴적으로 측정하여 FEM 탄소성해석적으로 발표된 연구¹⁴⁾보고도 있다. 그러나, 지금까지 대부분의 연구는 초기분포 잔류응력과 외부하중에 의한 잔류응력이 중첩되어 피로균열에 영향을 주는 것으로 해석이 되었다.

본 연구에서의 실험결과는 앞절에서 언급한 바와 같이 피로균열이 증가함에 따라 초기잔류응력 분포는 변하여 재분포하고 있음을 알 수 있다. 따라서, 용접잔류응력이 피로균열에 미치는 영향을 정확히 파악하기 위해서는 피로균열에 따른 잔류응력의 재분포를 고려하여야 한다.

Fig. 5 및 Fig. 6은 각각 초기 잔류응력과 피로균열진전에 따라 재분포되는 잔류응력에 의한 응력비와 응력확대계수값의 변화를 나타낸 것이다. 초기 잔류응력분포에 비하여 균열진전에 따른 인장잔류응력 폭이 용접중심선 위치로부터 크게 나타나게 되는데 이것은 피로균열이 진전되면서 잔류응력이 재분포되어 인장으로부터 압축잔류응력으로의 전환점(잔류응력 0인 위치)이 용접중심선 위치로부터 멀리 이동하는 결과이다.

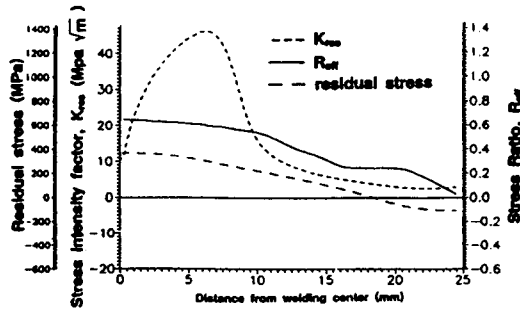


Fig. 5 Stress intensity factor, K_{max} , and stress ratio, R_{eff} by initial stress

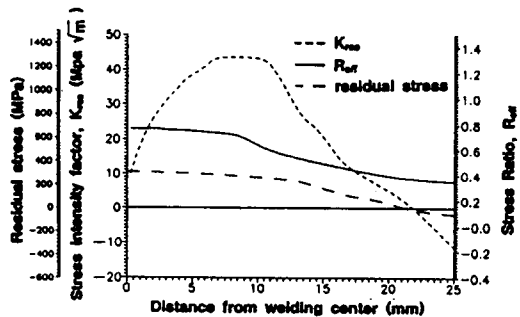


Fig. 6 Stress intensity factor, K_{max} , and stress ratio, R_{eff} by residual stress redistributed during fatigue cracking

그리고 그 결과로부터 응력비 값은 높게 나타나고 응력확대계수는 완만하게 변하고 있음을 나타낸다. 이로부터 초기잔류응력의 경우보다 피로균열진전과 함께 재분포하는 경우가 높은 응력비를 갖게 되어 실제로 피로균열진전에 큰 영향을 주고 있음을 알 수 있다. Fig. 7은 모재 및 용접시험편의 하중 반복수에 대한 균열진전길이를 나타낸 것으로 초기 균열길이로부터 균열이 진전될때 용접 시험편은 대체적으로 $2.6 \times 10^6 \sim 2.8 \times 10^6$, 용접하지 않은 시험편은 $4 \times 10^5 \sim 5 \times 10^5$ 반복수에서 완전 분리 파괴 되었다.

이 결과는 용접시험편의 경우 인장 잔류응력이 분포하는 용접부 중앙으로부터 피로균열이 진전될 때 중앙부의 인장 잔류응력이 피로균열진전에 기여함으로써 재료의 피로수명을 단축시킨 결과임을 알 수 있다.

이 결과를 이용하여 응력확대계수 폭에 대한 피로균열진전속도를 모재 및 용접시험편에 대하여 재료상수와 함께 나타내면 Fig. 8과 같다. 그림에

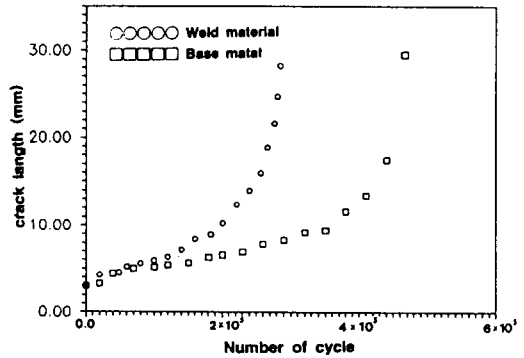


Fig. 7. Crack Length vs. number of cycle

서 모재의 피로균열진전속도에 비하여 용접시험편의 피로균열진전속도가 높게 나타나고 있는데 이러한 현상은 균열초기에 분포하는 인장잔류응력이 피로균열진전에 영향을 주고 있는 결과이며, 용접 시험편의 경우는 초기 잔류응력분포에 의한 것보다 균열진전과 함께 재분포한 잔류응력을 고려할 때 균열진전속도가 높게 나타나고 있다. 이것은 이미 설명한 바와 같이 초기 잔류응력분포에 비하여 균열진전과 함께 잔류응력이 재분포하는 경우 응력비의 영향이 커지므로 피로균열진전속도가 높게 나타난 것으로 판단된다. 그리고 초기에는 용접선 중앙부의 높은 인장잔류응력 영향을 받아 균열진전속도가 모재의 경우보다 매우 높게 나타나고 균열이 진전함에 따라 잔류응력이 점점 감소하여 모재의 균열진전속도에 접근하는 경향을 보여주고 있다.

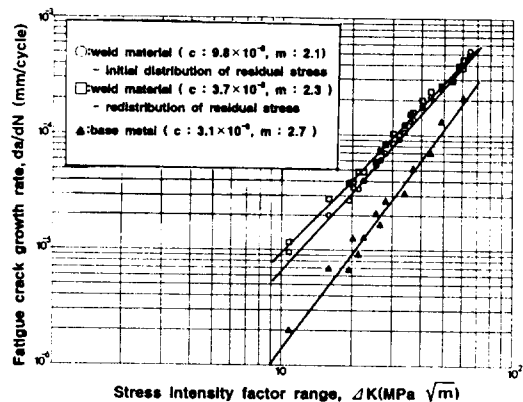


Fig. 8. Fatigue crack growth vs. stress intensity factor range

5. 결 론

이상과 같은 실험의 고찰을 통하여 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 용접부의 잔류응력은 균열진전과 더불어 균열선단의 최대잔류응력과 인장에서 압축잔류응력의 변환점이 균열 방향으로 이동하며 재분포한다.
2. 피로균열시 용접잔류응력은 반복하중수에는 거의 영향을 받지 않고 대부분 균열증가에 기인되어 이완되므로 재분포한다.
3. 용접하지 않은 재료에 비하여 용접재료에서는 균열진전속도가 높게 나타나고 초기에는 높은 인장잔류응력의 영향을 받아 그 차이가 높게 나타나며 점점 균열진전과 더불어 그 차이는 감소한다.
4. 균열이 진전되면서 잔류응력은 재분포되고 응력비의 영향이 초기 잔류응력의 경우보다 크게 되므로 실제 잔류응력이 피로균열진전에 미치는 영향은 초기 잔류응력분포를 고려한 경우보다 커진다.

참 고 문 헌

1. 向井喜彦, 西村新: 溶接残留应力場の再分布と疲労き裂傳播方向に關する研究, 溶接學會論文集, 第 5卷, 第 2號, (1987), pp. 280-284.
2. R. G. Forman, V. E. Kearney and R. M. Engle : Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures, Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol. 89(1967), pp. 459.
3. 이용복, 김상철: 용접잔류응력영역에서의 피로균열전파에 대한 Forman식의 적용, 대한용접학회지, 제5권, 제1호(1987), pp. 42-56.

4. H. Terada : Analysis of the Stress Intensity Factor of a Crack Perpendicular to the Welding Bead, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 8 (1976), pp. 441-444.
5. O. V. Green : Transactions, American Society for Steel Treating, Vol. 18(1930), pp. 369.
6. G. C. Sih : handbook of Stress-Intensity Factor, Section 1, 4. 2-1(1973).
7. 向井喜彦, 西村新: 引張残留应力場からき裂が傳播する場合の 溶接残留应力場の再分布に關する研究, 溶接學會論文集, 第 4卷, 第 1號(1986), pp. 154-159.
8. J. Mather : Determination of metal stress by measuring the deformation around drill holes, Trans. ASME, Vol. 86(1934), pp. 249-254.
9. W. Sun and H. Sehitoglu : Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. Vol. 15, No. 2, (1992), pp. 115-128.
10. 송삼홍, 김 현: 잔류응력의 재분포와 피로크랙 전파거동, 대한기계학회 91년도 춘계학술대회논문집(I), (1991), pp. 27-30.
11. 송지호: 변동하중하의 피로파괴, 대한기계학회지, 제30권, 제2호, (1990), pp. 115-130.
12. S. Vaidyanathan and I. Finnie : Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME(1971. 6), pp. 242-246.
13. 福田收一, 渡 秀二: 疲労き裂傳播に およぼす溶接残留应力の影響, 日本機械學會論文集(A 編), 47卷, 416號(1981), pp. 384-390.
14. 小田 勇, 木村 由史: き裂を有する溶接材の變形舉動に 及ぼす残留应力の影響, 溶接學會論文集, 第 8卷, 第 3號(1990), pp. 409-414.

부 록

평판에서 용착금속을 포함한 필릿용접으로의 사상함수 유도

1. 복소평면 R과 Z 사이의 사상함수

사상 이론 중 다각형을 허수값이(+)인 영역에 사상시키는 Schwarz-Christoffel 이론¹¹⁾을 적용시키기 위하여 Fig. 4의 A, B, C, 그리고 D점을 선택하면

$$\frac{dZ}{dR} = K \frac{(R^2-1)^{1/4}}{(R^2-a^2)} \quad (a>1)$$

$$\text{그러므로 } Z = K \int_0^R \frac{(\xi^2-1)^{1/4}}{(\xi^2-a^2)} d\xi + C \quad (A1)$$

사상 조건을 적용시켜 상수를 구하면, E점에서 $R=0$ 일때 $Z=L/2+L/2 i$ 이므로 상수 $C=L/2+L/2 i$ 이다. 또 A점에서 $R=-1$ 일때 $Z=L$ 이며 B점에서 $R=1$ 일때 $Z=Li$ 이다. 두 조건에서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$K = \frac{-\frac{L}{2} + \frac{L}{2} i}{\int_0^1 \frac{(\xi^2-1)^{1/4}}{(\xi^2-a^2)} d\xi} \quad (A2)$$

그리고 $R>a$ 인 임의의 R에서 Z의 실수값은 $-d$

이므로 다음 식이 성립된다.

$$-d = \text{real} \left[\int_0^R \frac{(\xi^2-1)^{1/4}}{(\xi^2-a^2)} d\xi + C \right] \quad (R>a) \quad (A3)$$

(A3)를 만족시키는 a를 구한 후(A2)에서 K를 구하면 사상함수는 다음과 같다.

$$Z = K \int_0^R \frac{(\xi^2-1)^{1/4}}{(\xi^2-a^2)} d\xi + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} i \quad (A4)$$

2. 복소평면 W와 R사이의 사상함수

동일한 방법으로 C, D, 그리고 E점을 선택하면

$$\frac{dW}{dR} = \frac{K_1}{(R-a)(R+a)}$$

$$W = \frac{K_1}{2a} \log \frac{R-a}{R+a} + C_1$$

상수를 구하기 위하여 사상 조건을 적용시키면 E점에서 $R=0$ 일때 $W=0$ 이며, F점에서 $R \rightarrow \infty$ 일때 $W=di$ 이다. 그러므로 상수 $C_1=di$ 이며 $K_1=-2ad/\pi$ 이다. 그러므로 사상함수는 다음과 같다.

$$W = -\frac{d}{\pi} \log \frac{R-a}{R+a} + di, \\ R = a \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{d}(W-di)} + 1}{e^{\frac{\pi}{d}(W-di)} - 1} \quad (A5)$$